Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

3 юни 2017 г.

ТЕМА за 11 – 12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. В редица са подредени 2017 плочки, номерирани с числата от 1 до 2017. В началния момент кенгуру се намира на плочка 1. То прескача три плочки напред, след което прескача две плочки назад. После прескача четири плочки напред и се връща, прескачайки три плочки назад, и т.н. – всеки път кенгуруто прескача с по една плочка повече напред, отколкото при предното прескачане напред, и прескача с по една плочка повече назад, отколкото при предното прескачане назад. Скоковете продължават, докато има плочка, на която да стъпи. Да се определи броят на плочките, на които кенгуруто е стъпвало два пъти.

A) 503 **B)** 504 **C)** 1008 **D)** 2016 **E)** 1006

2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $x^3-2x^2+ax+1-a=0$ има три различни реални корена.

A) $a\in\left(1;\frac{4}{5}\right)$ **B)** $a\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$ **C)** $a\in(-\infty;1]$ **D)** $a\in(-\infty;1)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right)$ **E)** $a\in\left[\frac{5}{4};+\infty\right)$

3. Естественото числото $N=2017+n$ не надминава 2222. Да се намери броят на естествените числа n, за които съществуват естествено число s и просто число p така, че да е изпълнено равенството $N=s^p$.

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

4. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с радиус 3. Точките M, N, P и Q са среди съответно на страните AB, BC, CA и DA. Ако $MP\cap NQ=O$, а лицата на четириъгълниците $AMOQ$, $BNOM$ и $DQOP$ са съответно 8, 10 и 13, да се намери периметърът на $ABCD$.

A) 31 **B)** $\frac{46}{3}$ **C)** 92 **D)** $\frac{92}{3}$ **E)** Друг отговор

5. В триъгълна пирамида $ABCD$ ръбът AD е перпендикулярен на равнината (BCD) и има дължина $4\sqrt{3}$. Радиусите на вписаната и описаната окръжности на ΔBCD са съответно 3 и 9. Да се намери обемът на $ABCD$, ако ъгълът между равнините (ABD) и (ACD) е $60°$.

A) $48\sqrt{3}$ **B)** 72 **C)** $72\sqrt{3}$ **D)** $144\sqrt{3}$ **E)** 144

6. Върху окръжност по посока на часовниковата стрелка са записани последователно естествените числа от 1 до $2n$. Нека f е следното действие: избираме три последователни числа и разменяме местата на двете крайни. Една пермутация на числата $1, 2, \ldots, 2n$ ще наричаме „достижима“, ако тя може да се получи от първоначалната след краен брой прилагания на f. Да се намери броят на всички „достижими“ пермутации на числата $1, 2, \ldots, 2n$.

7. Дадено е уравнението $f(x)=(x-x_0)^{2000}.(x-x_1)\ldots(x-x_{15}).(x^2+x+p)=0$, където x_i $(i=0,1,\ldots,15)$ са различни естествени числа, а p е такова реално число, че уравнението $x^2+x+p=0$ няма реални корени. Ако сумата от всички корени на уравнението $f(x)=0$ е 2137, да се намери:

а) множеството от възможните стойности на p;

б) най-голямата възможна стойност на произведението от реалните корени на уравнението $f(x)=0$.

в) множеството от възможните стойности на $f(0)$.